

福建省“高等代数”与“线性代数”课程建设第二十五次研讨会

关于矩阵幂的秩不变的进一步探讨

谭宜家

福州大学数学与统计学院, 福建福州350108

2025年11月15日

- 1 引言
- 2 主要结论
- 3 参考文献

引言

矩阵的秩是矩阵理论中的一个基本工具, 它在《高等代数》线性方程组解的结构刻画中起着重要的作用(参见文献[1,2]).

设 F 是一个数域, $F^{n \times n}$ 表示 F 上所有 $n \times n$ 矩阵组成的集合. 对于任意 $\mathbf{A} \in F^{n \times n}$, $r(\mathbf{A})$ 表示矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩. 由矩阵秩的基本性质不难得到

$$n = r(\mathbf{A}^0) \geq r(\mathbf{A}^1) \geq \cdots \geq r(\mathbf{A}^k) \geq r(\mathbf{A}^{k+1}) \geq \cdots$$

引言

由于 $r(\mathbf{A}^k)$ 是非负整数, 所以必定存在一个非负整数 m , 使得 $r(\mathbf{A}^{m+1}) = r(\mathbf{A}^m)$. 那么, 一个自然的问题是:

(1) 对于给定的非负整数 m , 什么样的矩阵 $\mathbf{A}$ 满足

$$r(\mathbf{A}^{m+1}) = r(\mathbf{A}^m)?$$

(2) 对于给定的矩阵 $\mathbf{A}$, 满足

$$r(\mathbf{A}^{m+1}) = r(\mathbf{A}^m)$$

的最小非负整数 m 是多少?

引言

对于问题(1), 文献[3]探讨了 $m = 1$ 的情形, 利用矩阵的有理标准形证明了如下结论.

定理1.1[3]

设 $\mathbf{A} \in F^{n \times n} (n \geq 2)$, $d(\lambda)$ 为 $\mathbf{A}$ 的最小多项式, 则

$$r(\mathbf{A}^2) = r(\mathbf{A})$$

当且仅当

$(\lambda, d(\lambda)) = 1$ 或 λ 是 $d(\lambda)$ 的单因式.

注: 满足 $r(\mathbf{A}^2) = r(\mathbf{A})$ 的矩阵 $\mathbf{A}$ 称为秩幂等矩阵.

引言

文献[4]讨论了问题(1)的一般情形,利用矩阵的Jordan标准形证明了下面结论.

定理1.2[4]

设 $\mathbf{A}$ 是复数域上的 $n \times n$ 矩阵($n \geq 2$), m 是正整数,则下列条件等价:

- 1) 存在整数 $l > m$,使得 $r(\mathbf{A}^l) = r(\mathbf{A}^m)$;
- 2) 矩阵 $\mathbf{A}$ 的Jordan标准形中每一个主对角线元素全为0的Jordan块的阶均小于或等于 m ;
- 3) 对于任意整数 $l > m$,均有 $r(\mathbf{A}^l) = r(\mathbf{A}^m)$;
- 4) $r(\mathbf{A}^{m+1}) = r(\mathbf{A}^m)$.

引言

本文进一步探讨问题(1)和(2),对一般数域 F 上满足条件

$$r(\mathbf{A}^{m+1}) = r(\mathbf{A}^m)$$

的矩阵 $\mathbf{A}$ 给出一些新的等价刻画,同时获得满足

$$r(\mathbf{A}^{m+1}) = r(\mathbf{A}^m)$$

的最小非负整数 m 的一个方法.部分结论推广了定理1.1.

引言

对于 $\mathbf{A} \in F^{n \times n}$, 定义

$$R(\mathbf{A}) = \{\mathbf{A}\alpha \mid \alpha \in F^n\},$$

这里 F^n 表示数域 F 上全体 n 维列向量组成的向量空间;

$$N(\mathbf{A}) = \{\alpha \in F^n \mid \mathbf{A}\alpha = \mathbf{0}\};$$

$\mathbf{E}$ 表示单位矩阵.

- 1 引言
- 2 主要结论
- 3 参考文献

主要结论

定理2.1

设 $\mathbf{A} \in F^{n \times n}$, ($n \geq 2$), m 是非负整数. 则下列条件等价:

- (1) $r(\mathbf{A}^{m+1}) = r(\mathbf{A}^m)$.
- (2) 对于任意整数 $l \geq m$, 均有 $r(\mathbf{A}^l) = r(\mathbf{A}^m)$.
- (3) 对于任意整数 $l \geq m$, 均有 $R(\mathbf{A}^l) = R(\mathbf{A}^m)$.
- (4) 对于任意整数 $l \geq m$, 均有 $N(\mathbf{A}^l) = N(\mathbf{A}^m)$.
- (5) 对于任意整数 $l \geq m$, 均有 $F^n = R(\mathbf{A}^m) \oplus N(\mathbf{A}^l)$.
- (6) 存在可逆矩阵 $\mathbf{P} \in F^{n \times n}$, 使得 $\mathbf{A}^{m+1} = \mathbf{P}\mathbf{A}^m$.

主要结论

定理2.2

设 $\mathbf{A} \in F^{n \times n}$, $(n \geq 2)$, $d(\lambda)$ 为 $\mathbf{A}$ 的最小多项式, m 是非负整数. 则

$$r(\mathbf{A}^{m+1}) = r(\mathbf{A}^m)$$

的充要条件是存在整数 $k, 0 \leq k \leq m$, 使得 λ 是 $d(\lambda)$ 的 k 重因式.

主要结论

定理2.3

设 $\mathbf{A} \in F^{n \times n}$, $(n \geq 2)$, $d(\lambda)$ 为 $\mathbf{A}$ 的最小多项式, 则 m 是满足

$$r(\mathbf{A}^{m+1}) = r(\mathbf{A}^m)$$

的最小非负整数的充要条件是 λ 是 $d(\lambda)$ 的 m 重因式.

主要结论

定理2.3实际上给出了寻找满足条件 $r(\mathbf{A}^{m+1}) = r(\mathbf{A}^m)$ 的最小非负整数 m 的一个方法:

对于给定的矩阵 $\mathbf{A} \in F^{n \times n}$,对 $\mathbf{A}$ 的特征矩阵 $\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}$ 进行初等变换,求出 $\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}$ 的标准形

$$\mathbf{D}(\lambda) = \text{diag}(1, \cdots, 1, d_1(\lambda), \cdots, d_s(\lambda)),$$

其中 $d_i(\lambda) | d_{i+1}(\lambda), 1 \leq i \leq s-1$.那么 $d_s(\lambda)$ 是矩阵 $\mathbf{A}$ 的最小多项式.如果 $d_s(\lambda) = \lambda^m h(\lambda)$ 满足 $(\lambda, h(\lambda)) = 1$,那么 m 是满足

$$r(\mathbf{A}^{m+1}) = r(\mathbf{A}^m)$$

的最小非负整数.

主要结论

例2.1

考虑矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 对 A 的特征矩阵 $\lambda E - A$ 作

初等变换, 得 $\lambda E - A$ 的标准形

$$D(\lambda) = \text{diag}(1, 1, 1, \lambda^3(\lambda - 2)),$$

那么 $\lambda^3(\lambda - 2)$ 是矩阵 A 的最小多项式.

显然 $m = 3$ 是满足 $r(A^{m+1}) = r(A^m)$ 的最小非负整数. 实际上, 经计算得 $r(A) = 3, r(A^2) = 2, r(A^3) = r(A^4) = 1$.

- 1 引言
- 2 主要结论
- 3 参考文献

参考文献

- [1] 北京大学数学系. 高等代数[M]. 第二版北京: 高等教育出版社, 1988: 104-159.
- [2] 林亚楠. 高等代数[M]. 北京: 高等教育出版社, 2013: 58-88.
- [3] 史江涛. 关于矩阵幂的秩不变的充要条件的一个证明[J]. 高等数学研究, 2023, 26(1): 19-20.
- [4] 郭文静, 杨忠鹏, 陈梅香. (m, l) 秩幂等矩阵和 (m, l) 幂等矩阵的特征研究[J]. 北华大学学报(自然科学版), 2009, 10(1): 5-9.